

Física Estatística das Dinâmicas Sociais

Nuno Crokidakis

Grupo de Sistemas Complexos, IF-UFF

05 de Novembro 2014



Sumário

1 Introdução

Sumário

① Introdução

② Modelo do Votante

Sumário

- ① Introdução
- ② Modelo do Votante
- ③ Modelo do Votante Majoritário

Sumário

- ① Introdução
- ② Modelo do Votante
- ③ Modelo do Votante Majoritário
- ④ Modelo de Interações por Pares

Sumário

- ① Introdução
- ② Modelo do Votante
- ③ Modelo do Votante Majoritário
- ④ Modelo de Interações por Pares
- ⑤ Modelo de Sznajd

Sumário

- 1 Introdução
- 2 Modelo do Votante
- 3 Modelo do Votante Majoritário
- 4 Modelo de Interações por Pares
- 5 Modelo de Sznajd

Modelos de dinâmicas sociais (*socio-física*)

- Partículas $\Rightarrow$ Pessoas, animais, ...
- Sistemas definidos em redes (regulares, complexas, ...)
- Modelos baseados em agentes
- Interações: regras microscópicas
- Emergência de um comportamento coletivo (consenso, linguagem comum, prevalência ou extinção de uma doença...)
- Comportamento de Escala, Leis de Potência ($y \sim x^a$), Transições ordem-desordem, Correlações $\Rightarrow$ Física Estatística!
- Abordagem: equação mestra, eq. de Langevin, **simulações computacionais**, ...

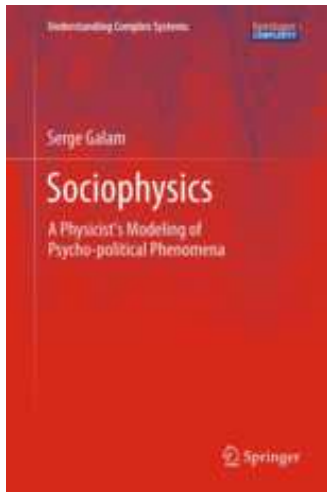
Podemos estudar uma variedade de problemas...

- Dinâmicas de Opinião (eleições, debates, ...)
- Espalhamento de Rumores, Crenças e Doenças
- Mercado Financeiro
- Tráfego de Veículos
- Dinâmica de Linguagens
- Movimento de Pedestres
- ...

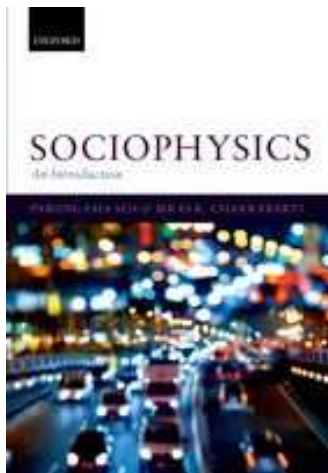
Relação com a Física Estatística

- A relação destes sistemas com a Física mais tradicional não é somente pela ocorrência de Fenômenos Críticos em ambos. Assim como os modelos da Física Estatística explicam por exemplo como uma coleção de átomos pode exibir o comportamento correlacionado necessário para produzir um ferromagneto, os modelos que representam Fenômenos Sociais pretendem explicar comportamentos interdependentes. A idéia básica da Física Estatística - que **o comportamento de um átomo é influenciado pelo comportamento dos outros átomos** - é, portanto, semelhante à afirmação das Ciências Sociais de que **as decisões de um indivíduo dependem das decisões dos outros**; aí que reside a possibilidade de uma estrutura matemática e/ou computacional comum;
- Um discussão interessante sobre esta relação pode ser encontrada no texto de Steven Durlauf, **How can statistical mechanics contribute to social science?**, PNAS 96, 10582 (1999).

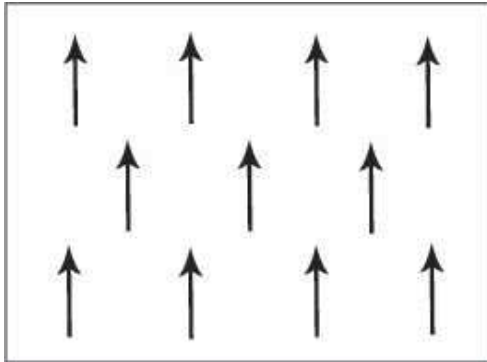
Área em alta na Física



Área em alta na Física

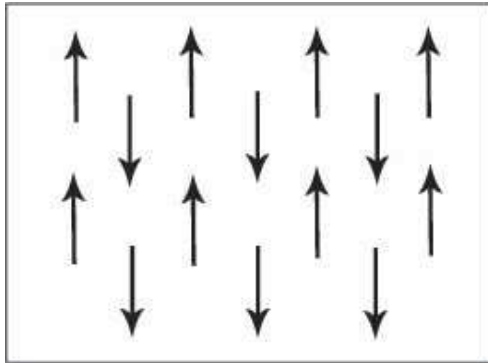


Ferromagnetismo



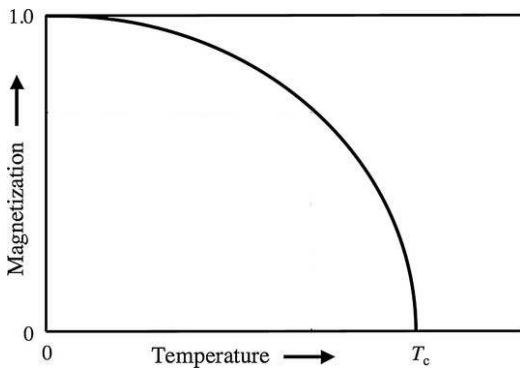
magnetização: $m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i = 1 \Rightarrow$ **ordem**

Paramagnetismo



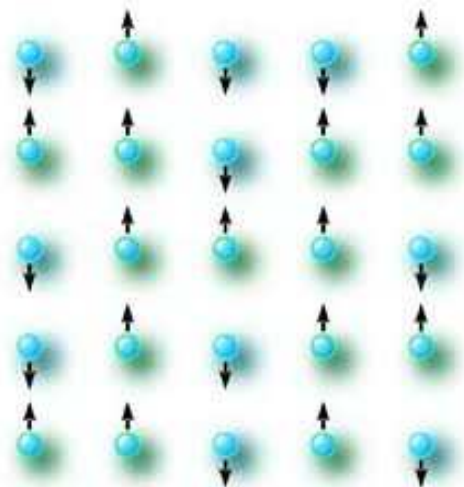
magnetização: $m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i = 0 \Rightarrow$ **desordem**

Magnetização x Temperatura



magnetização: parâmetro de ordem

Rede Quadrada $L \times L$



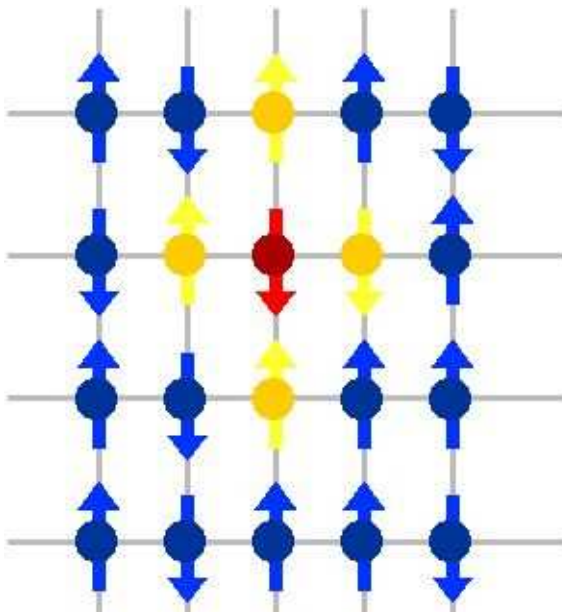
Modelo Simulado no Computador: Ising

- Spins localizados em sítios de uma rede quadrada, com 2 estados possíveis, $s = +1$ ou $s = -1$;
- Sistema a uma dada temperatura T ;
- Energia do sistema:

$$E = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j$$

onde a soma se estende sobre os primeiros vizinhos na rede.

Primeiros Vizinhos na Rede

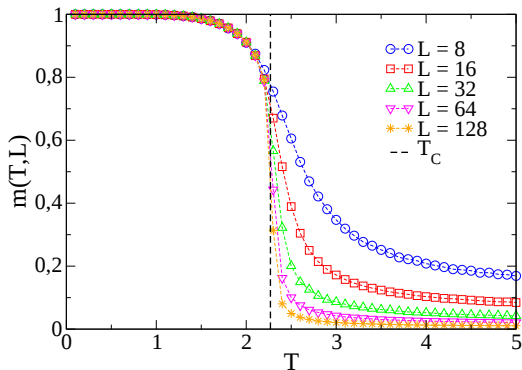


Algoritmo de Metropolis

- Os spins $+1$ e -1 são distribuídos aleatoriamente na rede ¹;
- Percorremos todos os sítios da rede em sequência;
- Para um dado spin i , invertemos seu estado, ou seja, fazemos $s_i \rightarrow -s_i$;
- Se esta mudança diminuir a energia E do sistema ($\Delta E < 0$), ela é aceita;
- Caso contrário ($\Delta E > 0$), a mudança é aceita com probabilidade $p = \exp(-\Delta E/T)$.
- Existe uma transição de fase para $T_c \approx 2.269$: para $T < T_c$ ($T > T_c$) o sistema se encontra ordenado (desordenado).

¹N. Metropolis et. al., J. Chem. Phys. 21, 1087 (1953)

Resultado Numérico



$$\Rightarrow \begin{cases} m(T, L) & \sim L^{-a} \\ T_c(L) - T_c & \sim L^{-b} \end{cases}$$

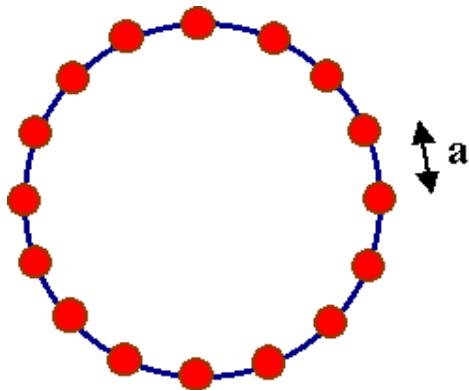
Dinâmicas de Opinião



Sumário

- 1 Introdução
- 2 Modelo do Votante**
- 3 Modelo do Votante Majoritário
- 4 Modelo de Interações por Pares
- 5 Modelo de Sznajd

Rede regular unidimensional

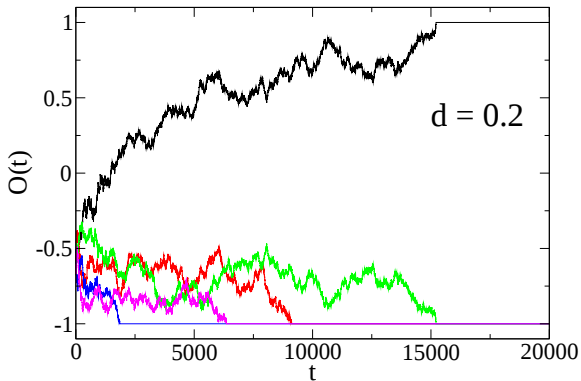


Regras do modelo

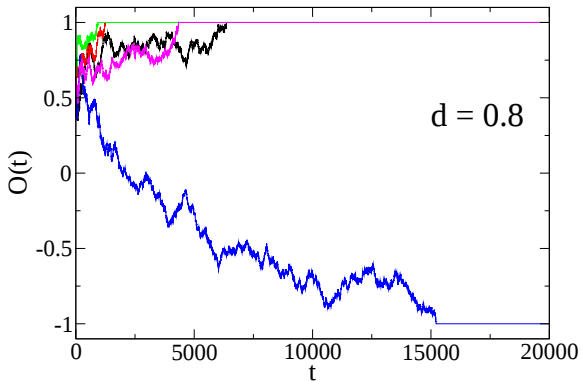
- 2 candidatos A e B, representados por 2 opiniões distintas, $s = +1$ ou $s = -1$, respectivamente;
- Configuração inicial: densidade d de opiniões $+1$ e densidade $1 - d$ de opiniões -1 ;
- Escolhemos 1 indivíduo ao acaso, e ele assume a opinião (candidato) de um dos seus vizinhos (escolhido aleatoriamente).
- Monitoramos a Opinião média O , isto é, a “magnetização por spin” do sistema,

$$O = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i$$

Evolução da Opinião Média: $d = 0.2$

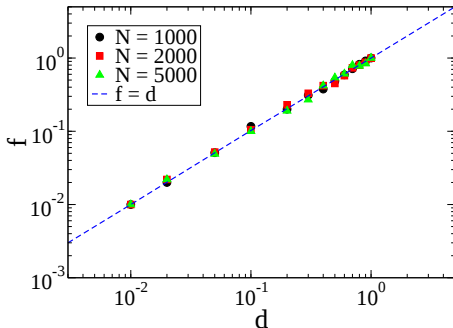


Evolução da Opinião Média: $d = 0.8$



Fração f das simulações com consenso

$$O = 1$$



⇒ Probabilidade de consenso $O = 1$ é igual à densidade inicial de eleitores do candidato A ($s = +1$)

⇒ Não observamos dependência com o tamanho N da rede

Conclusões

- Analogias com modelos magnéticos da Física Estatística;
- Representação simplificada de uma dinâmica de opiniões em uma população;
- A população sempre atinge estados de consenso;
- Ausência de transição de fase.

Sumário

- 1 Introdução
- 2 Modelo do Votante
- 3 Modelo do Votante Majoritário**
- 4 Modelo de Interações por Pares
- 5 Modelo de Sznajd

Modelo do Votante Majoritário

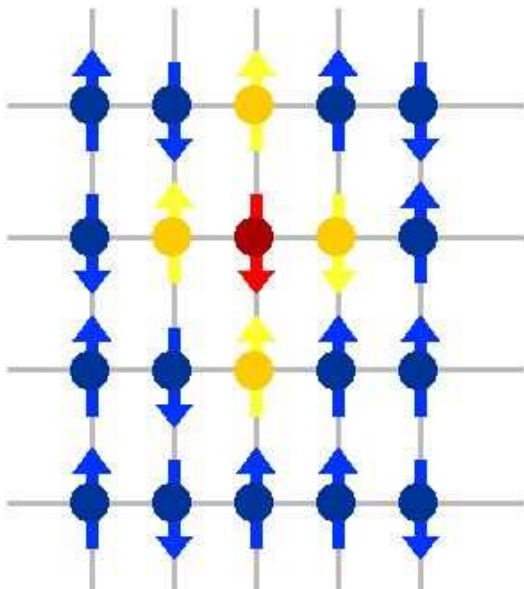
- Rede quadrada com $N = L^2$ indivíduos com uma entre duas opiniões representadas por variáveis de Ising, $\sigma_i = \pm 1$ (50% / 50%)²;
- Influência dos primeiros vizinhos no indivíduo do sítio central;
- Com probabilidade q o indivíduo central segue a opinião da **minoria** dos vizinhos;
- Com probabilidade $1 - q$ o indivíduo central segue a opinião da **maioria** dos vizinhos;
- Em outras palavras, a probabilidade w do indivíduo central mudar de opinião é dada por

$$w = \frac{1}{2} \left[1 - (1 - 2q) \sigma_i S \left(\sum_{\delta=1}^4 \sigma_{i+\delta} \right) \right],$$

onde $S(x) = \text{sgn}(x)$ se $x \neq 0$ e $S(0) = 0$.

²M. J. de Oliveira, J. Stat. Phys. **66**, 273 (1992)

Ilustração da Dinâmica

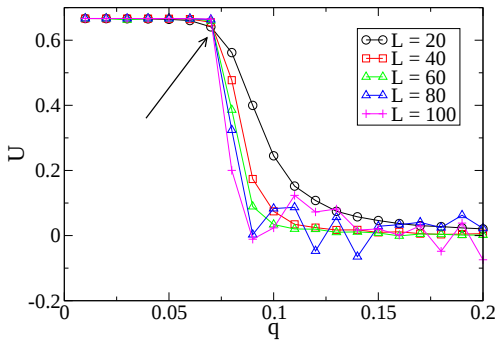


Quantidades de Interesse

$$m = \left\langle \frac{1}{N} \left| \sum_{i=1}^N o_i \right| \right\rangle$$
$$U = 1 - \frac{\langle m^4 \rangle}{3 \langle m^2 \rangle^2}$$

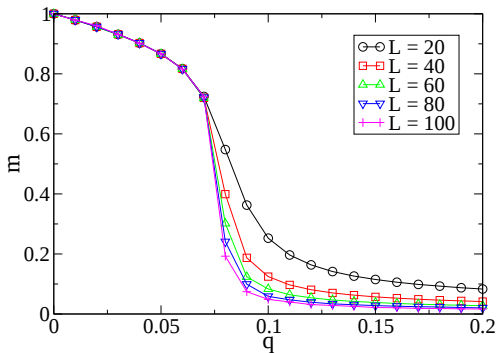
onde N é o número de agentes na rede e $\langle \rangle$ representa médias estatísticas.

Cumulante de Binder



$$\Rightarrow q_c \sim 0.075$$

Magnetização por spin



$$\Rightarrow \begin{cases} m > 0 & \text{para } q < q_c \sim 0.075 \\ m = 0 & \text{para } q \geq q_c \sim 0.075 \end{cases}$$

Conclusões

- Analogias com Sistemas da Física Estatística;
- Modelo mais sofisticado que o do votante;
- A população só atinge estados de consenso no caso onde não há agentes hesitantes ($q = 0$);
- Estados democráticos ($|m| < 1$) são possíveis no modelo;
- Estado desordenado: “empate” entre as 2 opiniões;
- Transição de fase ordem-desordem provocada pela presença de ruído.

Sumário

- 1 Introdução
- 2 Modelo do Votante
- 3 Modelo do Votante Majoritário
- 4 Modelo de Interações por Pares
- 5 Modelo de Sznajd

Regras

- 3 possíveis opiniões: $o = +1, -1$ ou 0 ³;
- Todos os agentes podem interagir entre si (campo médio);
- Interações entre pares (i, j) de agentes

$$o_i(t+1) = C_i o_i(t) + \mu_{ij} o_j(t)$$

$$o_j(t+1) = C_j o_j(t) + \mu_{ji} o_i(t)$$

- μ_{ij} e C_i são variáveis aleatórias que seguem as distribuições

$$F(\mu_{ij}) = p \delta(\mu_{ij} + 1) + (1 - p) \delta(\mu_{ij} - 1)$$

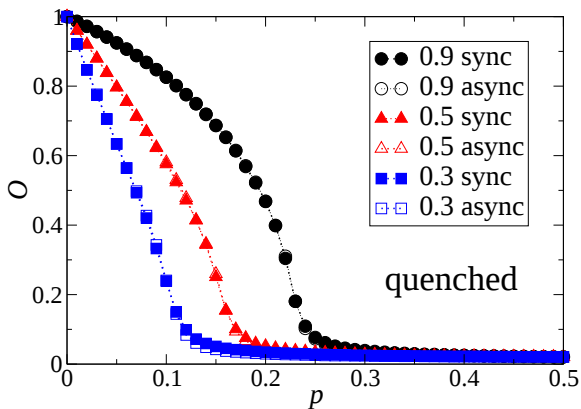
$$G_1(C_i) = q \delta(C_i - 1) + (1 - q) \delta(C_i - 0)$$

$$G_2(C_i) = q \delta(C_i - 1) + (1 - q) \delta(C_i + 1)$$

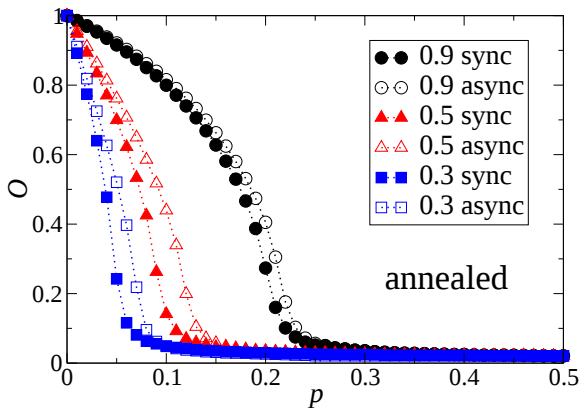
- Opiniões restritas ao intervalo $[-1, 1]$.

³N. Crokidakis, C. Anteneodo, Phys. Rev. E **86**, 061127 (2012).

Parâmetro de Ordem: variáveis congeladas



Parâmetro de Ordem: variáveis recozidas



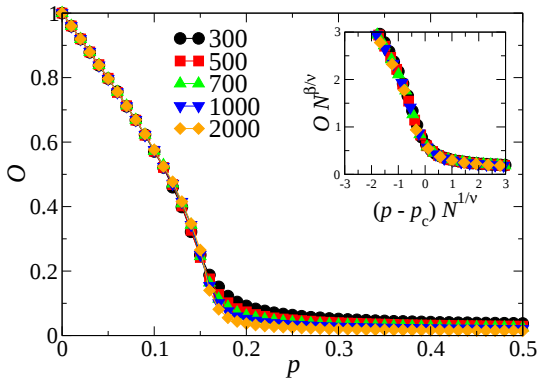
Análise de Tamanho Finito

- Técnica usada para obter o ponto crítico e os expoentes da transição (limite termodinâmico $N \rightarrow \infty$);
- Mesmos expoentes para diferentes valores dos parâmetros (p e q):
universalidade;
- Diferentes expoentes para diferentes valores dos parâmetros (p e q):
quebra de universalidade;
- Equações usuais de escala:

$$\begin{aligned}O(p, q, N) &\sim N^{-\beta/\nu} \\ p_c(q, N) - p_c &\sim N^{-1/\nu}, \\ U(p, q, N) &\sim \textit{constante}\end{aligned}$$

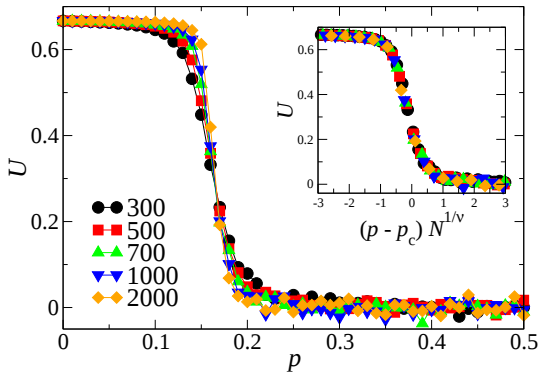
- Exibirei resultados para: $C_i = 1, 0$; $q = 0.5$; atualização sequencial, variáveis congeladas.

Análise de Tamanho Finito



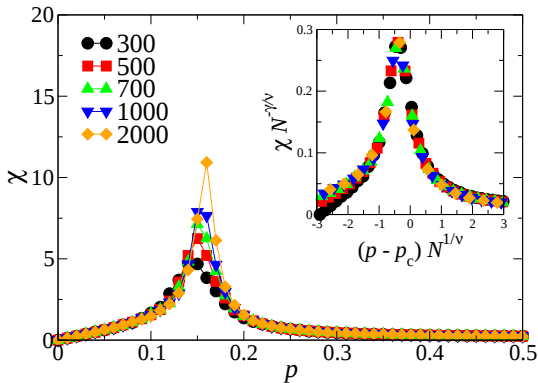
$$\Rightarrow p_c \approx 0.167, \beta = 1/2, \gamma = 1, \nu = 2$$

Análise de Tamanho Finito



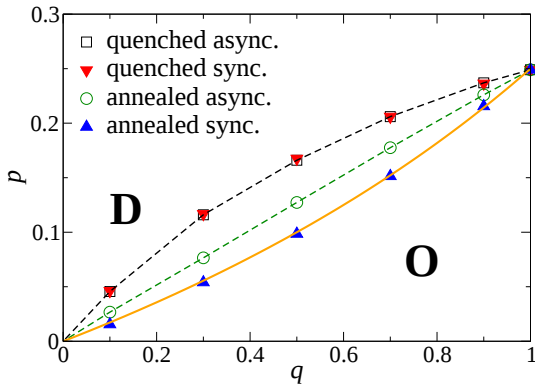
$$\Rightarrow p_c \approx 0.167, \beta = 1/2, \gamma = 1, \nu = 2$$

Análise de Tamanho Finito



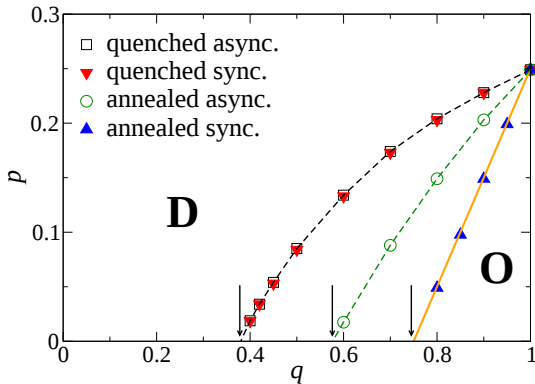
$$\Rightarrow p_c \approx 0.167, \beta = 1/2, \gamma = 1, \nu = 2$$

Diagramas de Fases: distribuição diluída



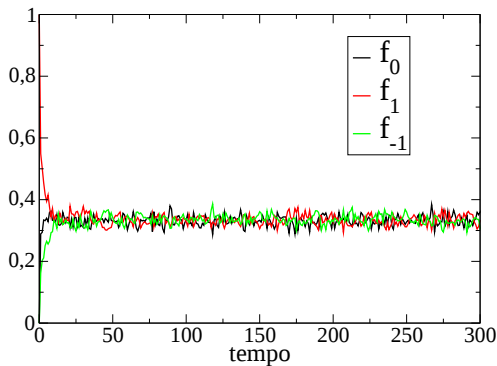
$\Rightarrow$ **universalidade:** $\beta = 1/2$, $\gamma = 1$, $\nu = 2$

Diagramas de Fases: distribuição bimodal



⇒ **universalidade:** $\beta = 1/2$, $\gamma = 1$, $\nu = 2$

Comportamento da Fase Desordenada



⇒ As frações das 3 opiniões são iguais!

⇒ $p = 0.1$, $q = 0.3$, atualização sequencial, variáveis temperadas

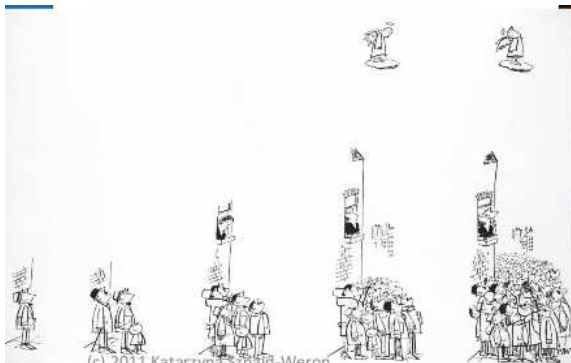
Conclusões

- Analogias com Sistemas da Física Estatística;
- A fase ordenada (“ferromagnética”) apresenta o domínio de uma das opiniões extremas, $+1$ ou -1 ;
- Estados de consenso ($+1$ ou -1 para todos os agentes) só ocorrem na ausência de interações negativas ($p = 0$);
- A fase desordenada (“paramagnética”) apresenta a coexistência das 3 opiniões $+1$, -1 e 0 ($1/3$ em média para cada);
- Possibilidade de solução analítica no limite de campo médio;
- Semelhanças e Diferenças nos resultados dependendo do tipo de variável aleatória (*quenched* ou *annealed*) e do tipo de atualização dos estados (*paralela* ou *sequencial*);
- Transição provocada pela presença de interações negativas ($\mathbf{p}$);
- Transição provocada pela heterogeneidade nas convicções dos agentes ($\mathbf{q}$);
- Universalidade na fronteira ordem-desordem (mesmos expoentes críticos: $\beta = 1/2$, $\gamma = 1$ e $\nu = 2$).

Sumário

- ① Introdução
- ② Modelo do Votante
- ③ Modelo do Votante Majoritário
- ④ Modelo de Interações por Pares
- ⑤ Modelo de Sznajd

Motivação



Motivação



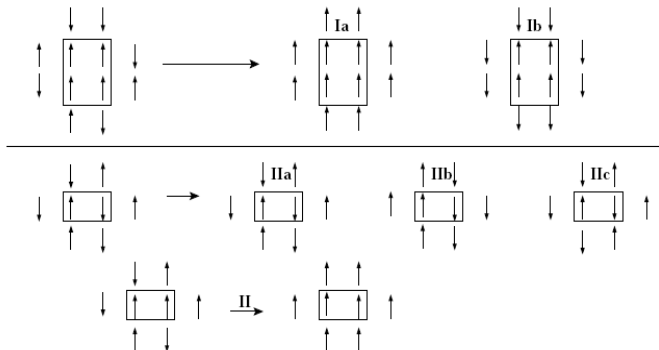
Modelo de Sznajd

- Os agentes são representados por spins, e possuem 2 estados (opiniões) diferentes, $s = +1$ e $s = -1$ ⁴;
- Os agentes são posicionados em uma rede quadrada ⁵;
- Configuração inicial de opiniões: densidade d de opiniões $+1$ e densidade $1 - d$ de opiniões -1 ;
- Interações: grupos de agentes com a mesma opinião convencem seus vizinhos na rede;
- “United we stand, divided well fall”.

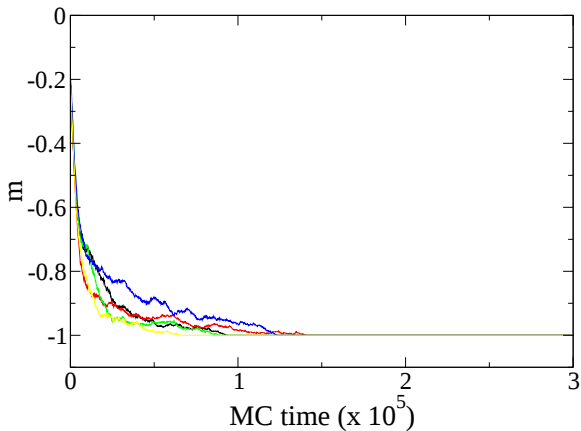
⁴K. Sznajd-Weron, J. Sznajd, Int. J. Mod. Phys. C 11, 157 (2000).

⁵D. Stauffer *et al.* IJMPC 11, 1239 (2000)

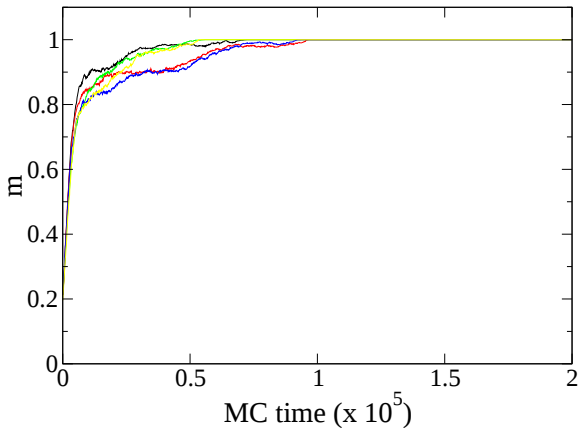
Algumas regras utilizadas em 2d



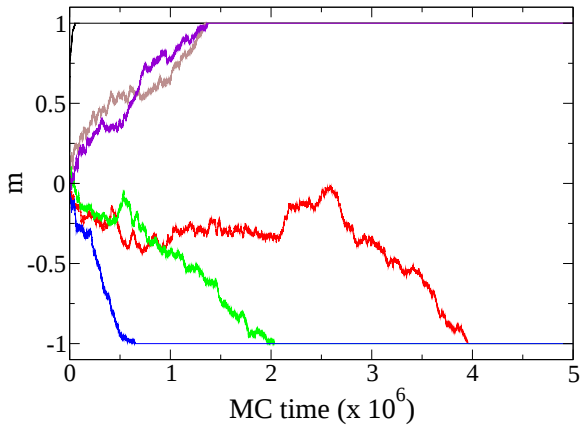
Evolução da magnetização com o tempo ($L = 73$, $d = 0.4$)



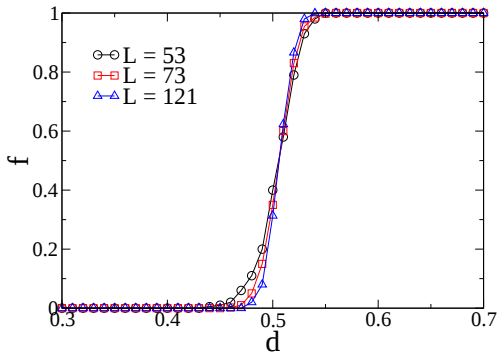
Evolução da magnetização com o tempo
($L = 73$, $d = 0.6$)



Evolução da magnetização com o tempo ($L = 73$, $d = 0.5$)



Transição de fase: $f \times d$



$$\Rightarrow \begin{cases} f = 0 & \text{para } d < 0.5 \\ f = 1 & \text{para } d > 0.5 \end{cases}$$

Modelo de Sznajd com Reputação

- Consideramos os agentes em uma rede quadrada $L \times L$, com opiniões iniciais aleatórias (densidade de opiniões $+1$ igual a d);
- L^2 números inteiros R são gerados a partir de uma distribuição gaussiana centrada em zero com largura $\sigma = 5$, e cada número é atribuído a um agente;
- Escolhemos aleatoriamente uma plaqueta de tamanho 2×2 com 4 vizinhos;
- Se os 4 agentes não tem a mesma opinião, nada ocorre;
- Se os 4 agentes tem a mesma opinião, calculamos a reputação média $\bar{R}$ da plaqueta

$$\bar{R} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 R_i ,$$

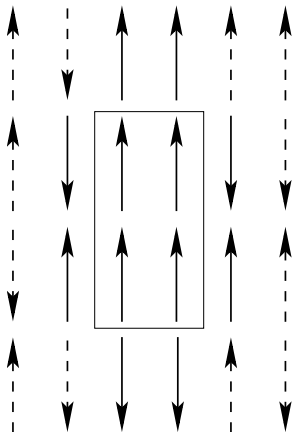
onde cada termo R_i representa a reputação de um agente da plaqueta.

Modelo de Sznajd com Reputação

- Comparamos a reputação média $\bar{R}$ da plaqueta com as reputações de cada 1 dos 8 agentes vizinhos. Assim, um dado agente vizinho j com reputação R_j segue a opinião da plaqueta se $\bar{R} > R_j$. Neste caso, a reputação de cada agente da plaqueta aumenta em 1 unidade ⁶;

⁶N. Crokidakis, F. L. Forgerini, Phys. Lett. A **374**, 3380 (2010)

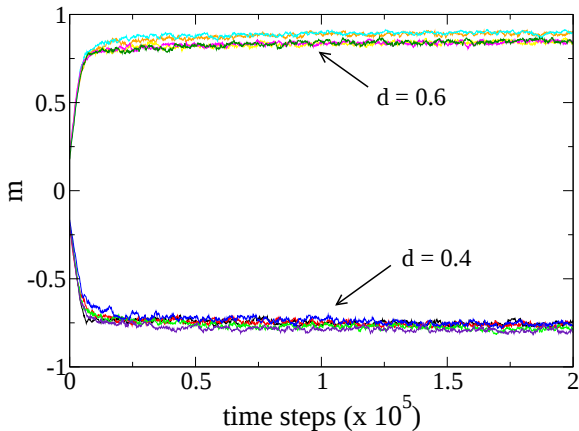
Representação Esquemática da Plaqueta e sua Vizinhança



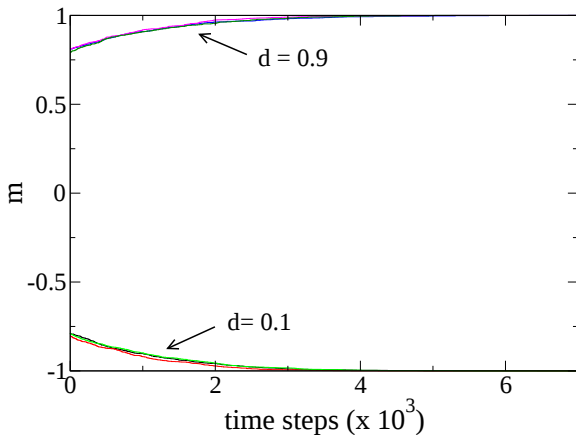
Motivações

- Introduzir reputação como um mecanismo que limita a capacidade de convencimento dos agentes;
- Analisar o efeito da reputação na formação de opiniões;
- Ditadura x Democracia?
- Estudar a transição de fase que usualmente ocorre no modelo;
- Se ocorrer, determinar o ponto de transição.

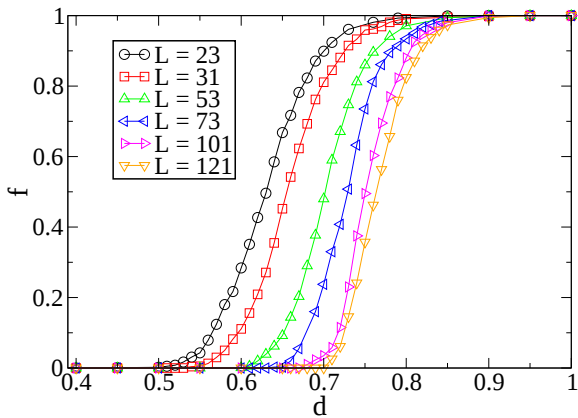
Evolução da magnetização com o tempo ($L = 73$)



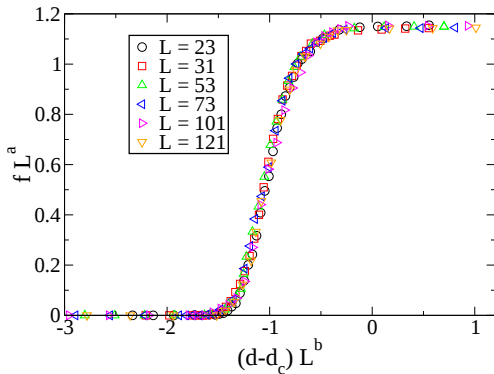
Evolução da magnetização com o tempo ($L = 73$)



Parâmetro de Ordem



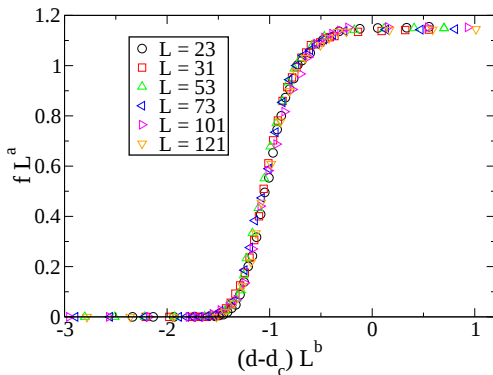
Análise de Tamanho Finito



$$\Rightarrow f \sim L^{-a}$$

$$\Rightarrow d - d_c \sim L^{-b}$$

Análise de Tamanho Finito



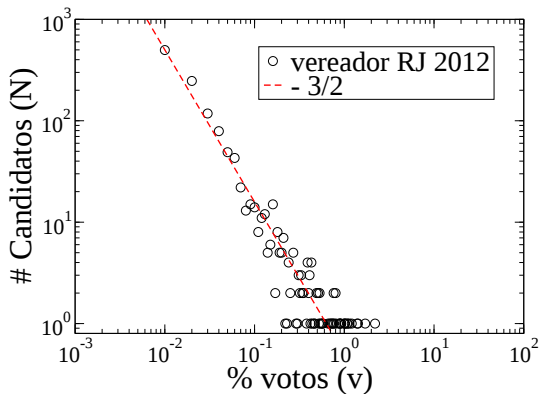
$\Rightarrow$ Ponto de transição: $d_c = 0.88 \pm 0.01$.

$\Rightarrow$ Expoentes: $a \sim 0.02$, $b \sim 0.5$

Aplicação: Eleições

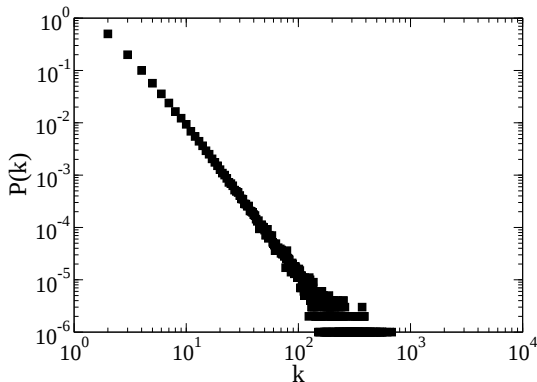
- Números das Eleições Municipais RJ 2012:
 - Total de Eleitores: 4.719.607
 - Comparecimento: 3.754.393
 - Abstenção: 965.214
 - Candidatos a Vereador: 1627

Aplicação: Eleições



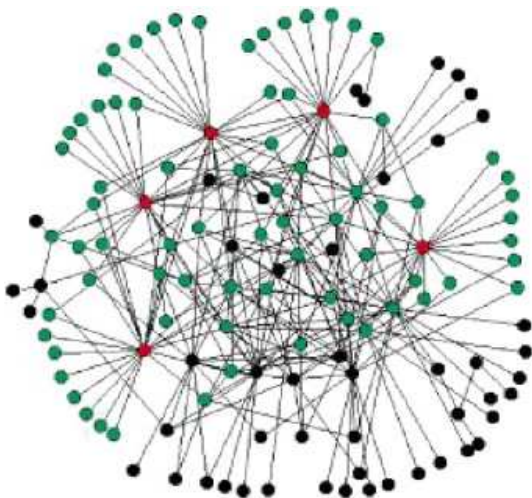
$$\Rightarrow N(v) \sim v^{-3/2}$$

Redes Livres de Escala



$\Rightarrow$ Probabilidade de 1 indivíduo ter k amigos: $P(k) \sim k^{-\gamma}$

Redes Livres de Escala

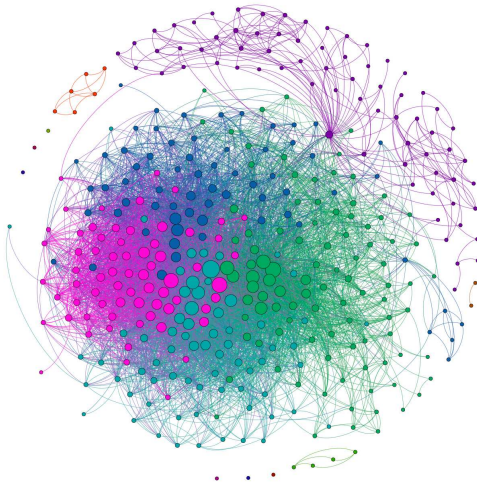


Scale-free

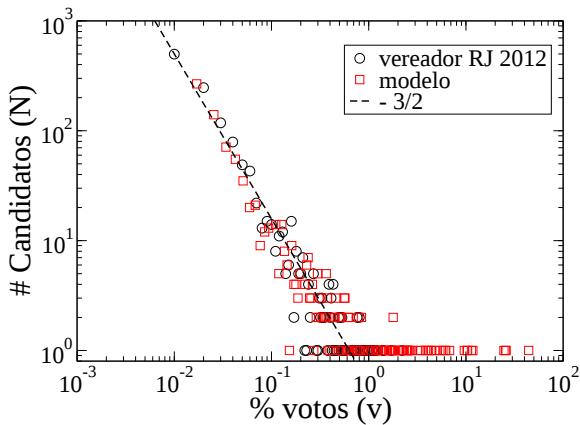
Exemplo: Facebook



Exemplo: Facebook



Modelo x Dados Reais



Conclusões

- A introdução de reputação evita estados de ditadura (consenso) para uma grande faixa de valores dos parâmetros;
- Estados democráticos emergem espontaneamente da dinâmica;
- Porém, estados absorventes com todos os spins para cima (baixo) são possíveis para grandes (pequenos) valores de d ;
- Potencial aplicação em Eleições.

Grupo de Sistemas Complexos, IF-IFF

- Pesquisadores:
 - Nuno Crokidakis
 - Marcio Argollo de Menezes
 - Jurgen F. Stilck
- Estudantes:
 - Rafael M. Brum (Doutorado)
 - Marcos Paulo G. Castro (Iniciação Científica)

Linhas de Pesquisa

- Transições de Fase e Fenômenos Críticos;
- Física Estatística de Sistemas Socio-Econômicos;
- Física Estatística de Sistemas Biológicos;
- Redes Complexas
- Processos Estocásticos
- Aplicações
- **<http://complex.if.uff.br/nuno>**

Obrigado!



Referências

- C. Castellano, S. Fortunato, V. Loreto, **Statistical physics of social dynamics**, Rev. Mod. Phys. 81, 591 (2009).
- N. Crokidakis, C. Anteneodo, **A simple opinion model that reproduces the vote distribution of Rio de Janeiro proportional elections**, *preprint*.
- N. Crokidakis, C. Anteneodo, **Role of conviction in nonequilibrium models of opinion formation**, Phys. Rev. E 86, 061127 (2012).
- N. Crokidakis, **Effects of mass media on opinion spreading in the Sznajd sociophysics model**, *Physica A* 391, 1729 (2012).
- N. Crokidakis, F. L. Forgerini, **Consequence of reputation in the Sznajd consensus model**, *Phys. Lett. A* 374, 3380 (2010).

Perguntas - **V** ou **F**, Justifique

- O conceito de Transição de Fase faz sentido em sistemas finitos.
- Podemos simular um sistema no limite termodinâmico ($N \rightarrow \infty$) no computador.
- Físicos utilizam modelos baseados em Magnetismo para tratar dinâmicas de opinião.
- Podemos resolver o modelo de Ising em 2 dimensões de forma exata.